10 класс

10.5. См. решение задачи 9.5.

10.6. Пусть R — вторая точка пересечения окружности Ω и отрезка AC (см. рис. 4). Из касания и равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, имеем $\angle MKP = \angle KAP = \angle KAR = \angle KPR$, откуда $PR \parallel CM$. Далее, $\angle CMQ = \angle CAQ = \angle RAQ = \angle RPQ$, поэтому прямые MQ и PQ совпадают, что и требовалось доказать.

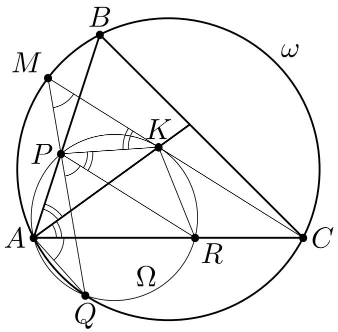

Рис. 4

Замечание. Нетрудно показать, что точка Q всегда лежит на дуге AC, не содержащей точки B.

10.7. Если $r = 0$, то утверждение задачи, очевидно, истинно. Пусть $r > 0$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — данные числа; положим $P =$

$= a_1 a_2 \ldots a_n$, $P_i = P/a_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, что $a_i > r$, ибо число P_i даёт остаток r при делении на a_i.

Рассмотрим число $S = P_1 + P_2 + \ldots + P_n - r$. Заметим, что $S = (P_1 - r) + (P_2 + P_3 + \ldots + P_n) \vdots a_1$, поскольку оба слагаемых делятся на a_1. Аналогично, $S \vdots a_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$; поскольку a_i попарно взаимно просты, получаем $S \vdots a_1 \ldots a_n = P$. Поскольку $S > a_1 - r > 0$, получаем, что $S \geqslant P$, а тогда $P_1 + \ldots + P_n = S + r > P$. Значит, при некотором i верно неравенство $P_i > P/n$, откуда $a_i < n$, или $a_i \leqslant n - 1$. Но тогда $r < a_i \leqslant n - 1$, то есть $r \leqslant n - 2$.

10.8. Рассмотрим граф G, вершинами которого являются города, и две вершины соединены ребром, если между городами есть авиалиния. Тогда нам известно, что граф связен, но при удалении всех рёбер любого нечётного цикла это условие нарушается; доказать же нужно, что вершины графа можно правильно раскрасить в 4 цвета. Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *Пусть в графе нет циклов нечётной длины. Тогда его вершины можно правильно раскрасить двумя красками.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать лемму для связного графа. *Расстоянием* между двумя вершинами X и Y назовём наименьшую длину пути, соединяющего эти вершины.

Зафиксируем некоторую вершину A, и покрасим все вершины, находящиеся на нечетном расстоянии от A, в красный цвет, а остальные вершины — в синий цвет. Докажем, что указанная раскраска — искомая. Предположим противное — имеется ребро, соединяющее, скажем, красные вершины B и C. Рассмотрим кратчайшие пути $A = B_0, B_1, \ldots, B_{2n-1} = B$ и $A = C_0, C_1, \ldots, C_{2m-1} = C$, ведущие из A в B и в C. Взяв наибольший индекс i такой, что $B_i = C_i$, получим цикл нечетной длины $B_i, B_{i+1}, \ldots, B_{2n-1}, C_{2m-1}, \ldots, C_i = B_i$. Противоречие. □

Пусть в графе есть цикл; удалим одно из рёбер этого цикла. При этом, очевидно, граф останется связным. Продолжим этот процесс до тех пор, пока циклов в графе не останется.

Обозначим через V множество всех удалённых рёбер, а через W — множество всех оставшихся. Заметим, что оставшийся граф по-прежнему связен. Это значит, что не существует нечётного цикла, все рёбра которого принадлежат V; в самом деле, если бы такой цикл существовал, то при удалении из G всех его рёбер остались бы все рёбра множества W, и граф остался бы связным.

Теперь рассмотрим два графа G_V и G_W, вершинами которых являются вершины графа G, а множества рёбер — это V и W, соответственно. Тогда в графе G_W циклов нет (значит, его вершины можно правильно раскрасить в цвета 0 и 1), а в G_V по доказанному нет нечётных циклов (значит, его вершины можно правильно раскрасить в цвета 0 и 2). Присвоим теперь каждой вершине сумму её цветов в этих раскрасках. Тогда, если две вершины соединены ребром в графе G, то они соединены ребром в одном из графов G_V или G_W; тогда, как нетрудно видеть, их цвета различны, то есть полученная раскраска (в цвета $0, 1, 2, 3$) является правильной.